

C.F. Gauß' Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1820er Jahren

Erhard Scholz, Wuppertal¹

Zusammenfassung

In the historical literature there has been an extended discussion on the question, whether the report of Sartorius von Waltershausen about C. F. Gauss checking the largest triangle of the geodetical measurement campaign in the kingdom of Hannover as a kind of “test” for the Euclididean nature of physical space can be taken seriously or not. Among others, it was argued that it even was logically impossible for Gauss to do so in the early 1820s (i.e. in particular, before J. Bolyai's, N.I. Lobachevsky's, or even B. Riemann's works). This article shows, in which sense Gauss's methodology of curvature of surfaces, although logically developed in all clarity only for surfaces embedded in Euclidean 3-space, could very well be used already in the early 1820 to investigate the above mentioned question in the sense of physical geometry. Although we do not have a definitive proof of the respective calculations by Gauss's own hand, the latter's account of the situation to contemporaries (correspondents, friend and students) changed clearly between the early and the late 1820s. That speaks very much in favour of a basic correctness of Sartorius von Waltershausen's report on this topic.

1. Zum Stand der historischen Diskussion

In dem von unserem Jubilar herausgegebenen Sammelband zum 200. Geburtstag von Carl Friedrich Gauß (Schneider 1981) stellte H. Gericke die Gaußschen Überlegungen zur Rolle der “charakteristischen Konstante” $C > 0$ der nicht-euklidischen Geometrie dar. In differentialgeometrischer Sprache wird durch sie die Krümmung charakterisiert, $\kappa = -C$, und die Winkelsumme eines Dreiecks weicht bei gegebener Konstante C um einen vom Flächeninhalt F abhängigen Betrag ϵ vom euklidischen Wert ab,

$$\epsilon = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = C \cdot F.$$

Herr Gericke zitierte in diesem Kontext aus einem Brief vom 8. 11. 1824 des damaligen Jubilars, Gauß, an Taurinus : “Wäre die Nicht-Euklidische Geometrie die wahre, und jene Constante in einigem Verhältnisse zu solchen Größen, die im Bereich unserer Messungen auf der Erde oder am Himmel liegen, so ließe sie sich a posteriori ausmitteln” (Gauss Werke, VIII, 186-188). H. Gericke gab zu dieser treffenden Bemerkung über die Möglichkeit einer empirischen “Ausmittlung” der physikalischen Raumkrümmung den Kommentar:

¹scholz@math.uni-wuppertal.de

Man könnte z.B. die Winkelsumme in einem Dreieck messen. Da der Defekt [oben als ϵ bezeichnet, E.S.] dem Flächeninhalt proportional ist, muß man ein möglichst großes Dreieck wählen. Gauß wählte bekanntlich das Dreieck Brocken – Inselsberg – Hohen Hagen, dessen größte Seite ca. 105 km lang ist, und das Ergebnis war bekanntlich: Der Unterschied der Winkelsumme von 180° war jedenfalls kleiner als der Meßfehler.² Also: entweder ist die euklidische Geometrie wahr oder das Dreieck war immer noch zu klein. Die um eine Entscheidung befragte Natur hatte die Antwort verweigert. (Gericke 1981, 129)

Dieser Kommentar gab die bis Anfang der 1970er Jahre weitgehend unumstrittene Auffassung über die (geometrisch-) grundlagentheoretische Auswertung der geodätischen Messungen durch Gauß wieder. Um diese Zeit wurde jedoch unter einigen Wissenschaftshistorikern die Verlässlichkeit der Überlieferung in diesem Punkt angezweifelt. Gauß hatte sich in den uns überlieferten schriftlichen Äußerungen nie definitiv zu dieser speziellen Frage einer raumstrukturellen Auswertung seiner geodätischen Messungen geäußert. Die angegebene Auffassung basierte also neben einer naheliegenden historischen Extrapolation aus anderen Quellen, wie der oben zitierten Korrespondenz, auf den Anmerkungen des Zeitzeugen und Freundes von C.F. Gauß, Sartorius von Waltershausen, der in seinem Band *Gauß zum Gedächtnis* kurz nach dessen Tod berichtet hatte:

Die Geometrie betrachtete Gauss nur als ein consequentes Gebäude nachdem die Parallelentheorie als Axiom an der Spitze zugegeben sei: er sei indess zur Überzeugung gelangt, dass dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung z.B. aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohenhagen, Inselsberg, dass er näherungsweise richtig sei. Wolle man dagegen das genannte Axiom nicht zugeben, so folge daraus eine andere ganz selbstständige Geometrie, die er gelegentlich ein Mal verfolgt und mit dem Namen Antieuklidische Geometrie bezeichnet habe. (Sartorius von Waltershausen 1856, 81)

An anderer Stelle präzisierte Sartorius die vage, für sich genommen nicht sonderlich aufschlussreiche Aussage “näherungsweise richtig” durch eine Anmerkung zu Gauß’ neu entwickeltem geodätischen Präzisionsmessinstrument, dem Heliotrop:

Das Heliotrop fand sogleich bei der Hannöverschen Triangulation seine volle Anwendung und das grosse Dreieck, vielleicht noch

²Gauß hatte im Jahre 1823, also im Vorjahr des zitierten Briefes an Taurinus, das erwähnte Dreieck mit einer bis dahin nicht erreichten Präzision ausgemessen und eine Abweichung der Winkelsumme von etwa $0,6''$ erhalten; weitere Details siehe unten. Anm. E.S.

das grösste, welches gemessen worden ist, nämlich zwischen dem Brocken, dem Inselsberg und dem Hohenhagen, wurde mit Hülfe desselben so genau gemessen, dass die Summe der drei Winkel nur etwa um zwei Zehnthelle einer Secunde sich von zwei Rechten entfernt. (Sartorius von Waltershausen 1856, 53)

Diese Präzisierung, ungefähr “zwei Zehnthelle einer Secunde”, ist ein deutlicher Hinweis auf ein von Gauß in mündlichen Gesprächen mitgeteiltes Präzisionsmaß bei der Auswertung seiner Messungen. Es wäre sehr befremdlich zu unterstellen, dass der Berichterstatter eine solche Angabe einer Fehlerschranke erfunden und seinem Bericht zugefügt hätte. Es bleibt aber zu klären, um welche Art der Fehlerschranke es Gauß bei der von Sartorius zitieren Bemerkung ging oder gehen konnte. Wir werden darauf zurückzukommen haben.

Im Jahre 1972 stellte der damals junge Physikhistoriker A. Miller in einem Artikel in *Isis* die bis dahin weitgehend unangefochtene Darstellung des Sartorius von Waltershausen in Frage (Miller 1972). Dieser Artikel erzielte eine durchschlagende Wirkung. In einem anderen, von K. Reich verfassten, Beitrag zum selben Sammelband, in dem H. Gericke auf die “wohlbekannte” Geschichte der Auswertung verwies, fügte die Autorin der Wiedergabe der ersten der beiden oben wiedergegebenen Zitatstellen bei Sartorius folgende kritische Bemerkung an:

In der Sekundärliteratur sind oftmals Bemerkungen der Art zu finden, daß Gauß bei der Vermessung dieses Dreiecks die wahre Struktur des Raumes, sei er euklidisch oder nichteuklidisch in Erfahrung bringen wollte. Da Gauß selbst diese Verbindung nicht ausdrücklich hergestellt hat, ist diese Interpretation vor einigen Jahren sowohl angezweifelt als auch bestätigt und wieder angezweifelt worden. (Reich 1981, 104f.)

Damit widersprach sie offen, wenn auch zurückhaltend der Darstellung von Herrn Gericke im selben Band. Zwar enthielt sie sich einer eigenen Stellungnahme zu diesem Problem, verwies in einer Anmerkung aber auf die damals vorliegende Literatur.³ Bei einer anderen Gelegenheit habe ich selber schon kurz erklärt, warum ich die gegen die Darstellung des Sartorius von Waltershausen vorgetragenen Zweifel nicht teile, also in K. Reichs Formulierung die erwähnte Geschichte als “wieder bestätigt” ansehe (Scholz 1992, 643f.). Die Diskussion unter Wissenschaftshistorikern wurde also fortgeführt, jedoch, wie es scheint, mit weiterhin offenem Ergebnis. Die detaillierteste, höchst sachkundige Darstellung findet sich bis heute bei (Breitenberger 1984); sie beschränkt sich allerdings darauf zu belegen, “was Gauß tatsächlich getan hat und was man ihm ungestraft nachsagen darf”.⁴ Dabei entsteht ein

³K. Reich gab folgende Literaturstellen an: (Miller 1972) (“angezweifelt”), (Goe 1974, van der Waerden 1974) (“bestätigt”) und (Miller 1974) (“wieder angezweifelt”).

⁴Persönliche Mitteilung E. Breitenberger an den Autor, 18. 02. 2003.

— aus meiner Sicht übertrieben — skeptisches historisches Gesamtbild der Gaußschen Perspektive.⁵

Die derzeitige Situation lässt sich wohl am besten so zusammenfassen: Unter Wissenschaftshistorikern wird tendenziell eher bezweifelt als akzeptiert, dass Gauß seine Messungen wie angegeben ausgewertet hätte (Miller) oder dass er es überhaupt sinnvoll hätte tun können (Breitenberger u.a.). Unter Mathematikern und mathematischen Naturwissenschaftlern (insbesondere Geodäten und Physikern) wird dies eher als gesichert angesehen als bezweifelt; diese Sicherheit beruht jedoch zum Teil auf Unkenntnis der vorgebrachten Zweifelsgründe.

Es mag also gerechtfertigt sein, hier auf diese Frage zurückzukommen. Ich werde dazu die ursprünglichen Gegenargumente von A. Miller “kritisch würdigen”, in diesem Fall heißt dies aufzeigen, warum sie am historischen Sachverhalt insgesamt ziemlich weit vorbeigehen (Teil 2). Dann werde ich die von E. Breitenberger vorgetragenen methodologischen Probleme vorstellen, die beim Versuch einer empirischen Überprüfung der Euklidizität des physikalischen Raumes durch geodätische Messungen auftreten und in Rechnung zu stellen sind (Teil 3). Schließlich möchte ich erklären, warum meiner Ansicht nach sämtliche der problematischen Punkte *im Rahmen der Gauß zur Verfügung stehenden Methoden als ausreichend abschätzbar* angesehen werden können, obwohl letzterem *nicht alle theoretischen Voraussetzungen in voll ausgearbeiteter Form* zur Verfügung standen (Teil 4). Es wird sich zeigen, dass Gauß im Rahmen seiner Fehlerabschätzungen durchaus in der Lage war, strukturelle Fragen empirisch aussagekräftig zu entscheiden (Teil 5). Damit kann ich keinen nachvollziehbaren Grund mehr sehen, die Verlässlichkeit des Zeitzeugen Sartorius von Waltershausen in Zweifel zu ziehen (Teil 6).

2. Die Etablierung eines Mythos

A. Millers ursprüngliche Kritik an der überlieferten Geschichte unter dem Titel *The myth of Gauss’ experiment on the Euclidean nature of physical space* enthält aus rückblickender Sicht erstaunlich wenig Argumente, wenn man die erhebliche Wirkung des Artikels in Rechnung stellt. Miller stellte folgende einfache, aber wie wir sehen werden, schlecht belegte zentrale These auf:

The famous experiment is in fact a mere legend that stems from a misunderstanding of his important paper of 1827 “Disquisitiones generales circa superficies curvas.” This work constituted the first

⁵Ich verdanke Jeremy Gray den Hinweis auf diese “offene Situation” und damit in gewissem Sinne die Anregung zu diesen Ausführungen. In einer Serie von Diskussionen hat er mir klar gemacht, warum man bessere Gründe des Zweifels haben kann, als in dem ursprünglichen Artikel von A. Miller angeführt. Bei einem dieser Gespräche (Tel Aviv im Mai 2001) war unser Jubilar anwesend und zeigte sich daran so interessiert, dass sich dieses Thema für diesen Sammelband wohl eignen mag.

systematic study of quadratic differential forms (of two variables) and was generalized by Riemann, in 1854, to n variables. (Miller 1972, 346)

Miller bezog sich damit auf den §28 der Arbeit (Gauss 1828), in dem Gauß mittels des von ihm präzisierten und verallgemeinerten Legendre-Theorem der sphärischen Geometrie nachprüfte,⁶ ob die Nichtsphärizität der Erdgestalt schon bei Größenordnungen der von ihm ausgemessenen Dreiecke quantitative Auswirkungen in Nähe der Messgenauigkeit hat und daher ggfs. schon bei der *Auswertung der Daten eines einzelnen geodätischen Dreiecks* in Rechnung zu stellen ist.

Gauß verglich dabei die Winkelkorrekturen, die an einem Dreieck \triangle auf der sphärisch oder ellipsoidisch angenommenen Erdoberfläche angebracht werden müssen, um zu einem seitengleichen ebenen (euklidischen) Dreieck \triangle^* überzugehen. Im sphärischen Fall ist der Winkelüberschuss des Dreiecks \triangle über 180° gleichmäßig auf die drei Winkel zu verteilen, im nichtsphärischen Fall verschieden, in Abhängigkeit von der Krümmung der Fläche (Erdgestalt) in den einzelnen Ecken. Gauß ermittelte, dass im Testfall des Dreiecks Brocken - Hohehagen - Inselsberg (das ich im folgenden kurz als das *große Dreieck* oder $\triangle BHI$ bezeichnen möchte) der von ihm ermittelte Winkelüberschuss $14'', 85348$ in den Teilbeträgen $4'', 95104$, $4'', 95113$ und $4'', 95131$ auf die Ecken B, H, I aufzuteilen ist, also erst in der vierten Nachkommastelle einer Winkelsekunde und damit weit unterhalb der Messgenauigkeit (erste Nachkommastelle bei den besten Messungen)⁷ von der Gleichverteilung abweicht.

Miller gab eine zutreffende — nebenbei angemerkt, vorher keineswegs bestrittene — Darstellung dieses Sachverhaltes:

That Gauss concluded nothing about the non-Euclidean nature of physical space [in (Gauss 1828, §28), E.S.] is not surprising, because the mathematical theory which he developed in this paper was not at all concerned with non-Euclidean geometry. What Gauss was seeking was a generalization of Legendre's result to a doubly curved surface in order to determine whether the earth's double curvature had any effect on his geodetic data. (Miller 1972, 348)

⁶Das Legendre-Theorem der sphärischen Geometrie besagt: Ein sphärisches Dreieck mit kleinen Seiten und daher kleinem sphärischen Exzess hat approximativ gleichen Flächeninhalt wie das ebene Dreieck mit gleichen Seitenlängen. Jeder Winkel des ebenen Dreiecks ist um ein Drittel des sphärischen Exzesses kleiner als der entsprechende Winkel des sphärischen Dreiecks. — Gauß gab eine Präzisierung der Approximation des Flächeninhalts und verallgemeinerte den Satz samt Winkelkorrekturen für den Fall eines "kleinen" Dreiecks auf einer beliebig gekrümmten Fläche. Vgl. (Dombrowski 1978) oder (Scholz 1992, 639f.)

⁷Der mittlere Fehler (im Sinne der empirischen Standardabweichung) war $3,5''/\sqrt{n}$ bei n Messungen derselben Richtung (Breitenberger 1984, 273, 279f., 281)

Er fuhr fort:

Thus, Gauss did not have to use his geodetic data to determine whether the space of our experience is curved. He was studying a curved surface of known curvature — the earth. Additional proof that a misunderstanding of Gauss’ 1827 paper led to the legend of his “experiment” is that of the many triangles that he surveyed and reported on, the previously mentioned triangle is the only one taken into account in the aforementioned paper. It therefore appears that what up to now has often been presented as Gauss’ experiments on the nature of the space in which we live is simply a myth. (ibid.)

Miller widerlegte hier überraschenderweise ein Missverständnis, (“misunderstanding of Gauss’ 1827 paper”), das in der informierten mathemathisch-historischen Literatur vor ihm keine Rolle spielte. Weder Sartorius von Waltershausen, noch einer der daran anknüpfenden informierten Autoren hatte vor A. Miller den §28 der *Disquisitiones generales* mit der Nichteuklidizitätsprüfung durch Gauß in Beziehung gebracht. Das nach Sartorius von Gauß erwähnte Genauigkeitsmaß (“um zwei Zehnteile einer Secunde von zwei Rechten entfernt”) widersprach bei genauem Hinsehen ziemlich in allem einer solchen Interpretation des §28: relevante quantitative Abweichung in der Größenordnung 10^{-4} Bogensekunden statt 10^{-1} , eine Abweichung von zwei Rechten stand hier nicht zur Debatte, vielmehr ging es hier um eine “Umrechnung” auf zwei Rechte im oben angemarkten Sinne der Bestimmung eines seitengleichen ebenen Dreiecks \triangle^* .⁸ Das Hauptargument A. Millers richtete sich also lediglich auf ein *von ihm selbst in die Historiographie der Mathematik hineingetrages Mißverständnis*. Der Hinweis auf das “große” Dreieck in Millers “additional proof” geht völlig an der naheliegenden Tatsache vorbei, dass Gauß dieses möglicherweise aus guten (und leicht nachvollziehbaren) Gründen gerne für Kontrollüberlegungen *verschiedener Art* heranzog — schließlich hatte er besondere Sorgfalt für eine möglichst genaue und so weit wie möglich vom Rest des Netzes unabhängige Messung dieses Dreiecks aufgewendet.⁹

Miller erhob dabei gar nicht den Anspruch, den Bericht des Zeitzeugen Sartorius von Waltershausen zu kritisieren. Anscheinend war ihm zur Zeit der Abfassung seines “Myth”-Artikels dieser Bericht sogar gänzlich unbekannt. Sonst wäre schwer zu verstehen und als die Leser absichtlich in die Irre führend anzusehen, dass im gesamten Artikel (Miller 1972) Sartorius nicht erwähnt wird, obwohl dieser der zentrale Bezugspunkt und “heimliche Gegner” des Millerschen Widerlegungsversuches war.¹⁰ Anstelle eines Bezugspunktes

⁸Dieses Argument führte schon van der Waerden in seiner Kritik von 1974 an.

⁹Siehe dazu (Gerardy 1955).

¹⁰In seiner Antwort an die Kritiker verteidigte sich Miller dann mit dem Versuch einer Abwertung des Zeitzeugenberichtes mit m.E. fadenscheinigen Sekundärargumenten vom

fand Miller jedoch nur eine Lücke vor, die er durch eine kühne Hypothese über den Ursprung der von ihm zum “Mythos” erhobenen Geschichte zu schließen versuchte:

In conclusion, a reasonable conjecture as to the origin of this myth is as follows. The question of whether the physical space is curved or not took on new meaning after Einstein’s general theory of relativity (1916), which utilized Riemannian geometry. Consequently, the myth may have arisen as a result of extrapolating back from Einstein’s work to Riemann’s 1854 work to Gauss’ 1827 paper (without reading it, of course), keeping in mind that Gauss’s theorems were applied to the largest triangle in his geodetic survey. . . . (Miller 1972, 348)

Das war ein mehr als eigenwilliger Versuch einer Neukonstruktion der Überlieferungsgeschichte, der die gesamte vor-relativistische Debatte um die “Natur” des Raumes im späten 19. und frühen 20. Jahrhundert komplett ignorierte. Es wäre deplaziert, die hier vorgestellte gegenstandslose Hypothese ausdrücklich “widerlegen” zu wollen; ihr Autor wird sie in der folgenden Debatte schrittweise wieder aufgegeben haben, nachdem (oder soll ich sagen “falls”?) er von der vor-relativistischen Diskussion über die empirischen Bezüge der nichteuklidischen Geometrie erfahren hat. In ganz anderem Sinne mag diese Passage allerdings aufschlussreich sein, nämlich als ein Indikator des Hintergrundes, aus dem heraus dieser Artikel geschrieben wurde und seine Wirksamkeit entfalten konnte. Zunächst einmal muss es ja rätselhaft erscheinen, wie es kommen konnte, dass ein so uninformativer und schlecht recherchierter Artikel als Standardreferenz auch für die spätere, besser begründete Kritik an der Überlieferungsgeschichte der Gaußschen Euklidizitätsüberprüfung anhand des “großen Dreiecks” dienen konnte.

Ich möchte hier nur kurz zusammenfassen: Die im Bericht des Sartorius von Waltershausen quellenmäßig zwar nur indirekt, aber durch Zeitzeugenbericht konkret belegte Geschichte der Gaußschen Euklidizitätsprüfung des physikalischen Raumes auf Grundlage der geodätischen Präzisionsmessungen wurde 1972 durch A. Millers Artikel ohne Diskussion des wichtigsten Zeugenberichtes und mit zweifelhaften Argumenten zu einem “Mythos” umkonstruiert, ergänzt durch eine offensichtlich falsche Hypothese über die Genese des “Mythos”. Es könnte interessant sein, der Frage nachzugehen, welcher Konjunktion von Bedingungen es geschuldet war, dass dieser Vorstoß so erhebliche Resonanz in der Wissenschaftsgeschichte fand. Das ist aber hier nicht unsere Absicht; vielmehr möchte ich im nächsten Abschnitt kurz vorstellen, welche methodologisch und historisch interessanten Fragestellungen trotz aller Mängel des ursprünglichen Anlasses aus der erst einmal angeregten Debatte um die Glaubwürdigkeit des Sartoriusschen Berichtes hervorgingen. Dabei geht es mir hier nicht darum, die Debatte in ihrer ganzen Typ: auch Ernst Mach habe Sartorius nicht ernst genommen usw. (Miller 1974).

Breite zu verfolgen. Ich werde mich stattdessen auf eine Auswertung des von E. Breitenberger im *Archive for the History of Exact Sciences* publizierten Artikels (Breitenberger 1984) aus Sicht unserer Fragestellung konzentrieren, um zu lokalisieren, welche ernst zu nehmenden Zweifel am Bericht des Sartorius sich im Verlauf der Debatte herausbildeten. Der Kürze halber werde ich die These, Gauß habe nie auf Grundlage seiner geodätischen Präzisionsmessungen des $\triangle BHI$ eine Euklidizitätsüberprüfung des physikalischen Raumes vorgenommen, im folgenden als *Millerschen Mythos* bezeichnen.

3. Weiterführende historisch-methodologische Zweifel

In seinem sachkundigen und sehr aufschlussreichen Beitrag von 1984 stellte E. Breitenberger die neuere Kritik am “Mythos” der Gaußschen Euklidizitätsüberprüfung in einen breiteren Rahmen. Er verwies auf ältere Bemühungen, des Astronomen Hugo von Seeliger und des Listing-Schülers Edmund Hoppe, in ähnliche Richtung.¹¹ Allerdings erwähnte er dabei nicht, dass Seeliger durchaus eigene Gründe dafür hatte, Gauß von dem — wie Seeliger meinte — “Makel” befreit sehen zu wollen, sich konkret (mit Suche nach jeweils bestmöglichen quantitativen Fehlerschranken) um die empirischen Gültigkeitsbedingungen der euklidischen Hypothese gekümmert zu haben. Seeliger vertrat nämlich selber in der Debatte des späten 19. Jahrhunderts um die nicht-euklidische Geometrie die Position, dass diese nicht einmal als geometrische Hintergrundtheorie der Astronomie brauchbar sei. Er hatte bei seiner Gauß-Interpretation also durchaus Parteiliches im Sinne.¹² Hoppe vertrat dagegen (unter Bezug auf einen Bericht Listings aus den 1870er Jahren) die Auffassung, Gauß habe die empirischen Gültigkeitsschranken der euklidischen Geometrie nicht aus geodätischen sondern aus astronomischen Messungen zu bestimmen versucht. Ich werde im letzten Abschnitt darauf zurückkommen.

Breitenberger steuert in seinem Artikel einen wendungsreichen Kurs durch die widersprüchliche Literaturlage zu diesem Thema. Er stützt die Kritiker von Seeliger bis Miller durch Argumente, die er als *interne Evidenz* (“internal evidence”) dafür betrachtet, dass Gauß eine empirische Überprüfung der euklidischen Raumstruktur durch seine geodätischen Messungen aus methodologischen Gründen gar nicht hätte durchführen können. Andererseits kennt Herr Breitenberger die Zeitzeugenberichte über eben solche Überlegungen von Gauß zu gut, um sie wie in der einfachen Variante des Miller-Mythos zu ignorieren oder wie in späteren “Verfeinerungen”, Sartorius als unglaub-

¹¹(Hoppe 1925), (Kienle 1925, 614).

¹²Breitenberger zitiert lediglich den Seeligerschen “Makel”-Vorwurf, ohne ihn in den Kontext der Seeligerschen Auffassung zu stellen (Breitenberger 1984, 274). Eine der Thesen, die K. Schwarzschild in seiner Habilitation (München 1899, bei Seeliger) zu verteidigen hatte, beinhaltete genau diese Auffassung einer Bedeutungslosigkeit der NEG für die Astronomie. Schwarzschild nahm dies zum Anlass für eine höchst nuancierte Diskussion der Frage in (Schwarzschild 1900); vgl. dazu (Schemmel 2002).

würdigen weil mathematisch ignoranten Zeugen zu entwerten. Er kommt zu der von ihm im einzelnen gut belegten Schlussfolgerung:

... it is safe to conclude that Gauss was sufficiently irked by the axiom of parallels, to bring it up in conversations repeatedly, and in different forms, sometimes quoting BHI [das *große* Dreieck, E.S.] sometimes not.

Thus the myth of the BHI triangle as a deliberate test of Euclidean geometry appears as a fanciful embroidery upon indubitable facts, encouraged possibly by reports of remarks made by Gauss in his inner circle. (Breitenberger 1984, 289)

Breitenberger kommt zu der überraschenden Schlussfolgerung, Gauß habe im inneren Kreis über empirische Kontrollüberlegungen der Gültigkeit der euklidischen Geometrie gesprochen, die er gar nicht habe durchführen können. Diese Einschätzung verbindet er jedoch mit einer *Verteidigung* des Sartorius-Berichtes, sogar einschließlich der dort gemachten quantitativen Angaben:

It also stands to reason that Sartorius could hardly have misunderstood the sense of Gauss' remarks, for although he was no mathematician, he was thoroughly familiar with surveying and had produced detailed maps of the Etna volcano, among others. What he recalls [die Genauigkeitsschranke der Winkelsumme von "zwei Zehntheilen einer Sekunde" im großen Dreieck, E.S.] is indeed quite consistent with the evidence above. (Breitenberger 1984, 289)

In der "evidence above" berechnet Breitenberger auf Grundlage der Gaußschen Messdaten die Abweichung der auf das ebene Dreieck umgerechneten Winkelsumme des $\triangle BHI$ zu $0,642''$ (Breitenberger 1984, 284f.), eine Möglichkeit auf die schon (van der Waerden 1974) hingewiesen hatte. Die von Gauß angegebenen Messdaten des großen Dreiecks führen nämlich auf eine "gemessene" Winkelsumme von $180^\circ 0' 14,211''$ auf der Sphäre. Rückrechnung auf ein seitengleiches ebenes Dreieck durch "Elimination des sphärischen Exzesses" führt auf den angegebenen Wert. Breitenberger kommentiert dies wie folgt:

The spherical excess of BHI is stated by Gauss himself to have been $14.85348''$; hence the closure error was $-0.642''$. He might well call this fine result *vortrefflich* and it astonishes us a little that he did not make more of it. (Breitenberger 1984, 285)

Der berechnete Wert ($0,6''$) stimmt größenordnungsmäßig mit dem von Sartorius angegebenen Wert überein; keiner der hier erwähnten Autoren sieht in der leichten Abweichung "zwei" statt sechs "Zehntheile" eine die Quelle entwertende Differenz, und auch Herr Breitenberger beurteilt den Vergleich als

“quite consistent”. Gauß selber erwähnte den Wert $0,6''$ am 28. 12. 1823 in seiner Korrespondenz mit Olbers (Gauss Olbers, II, 266).¹³

Dennoch sieht Herr Breitenberger darin *keinen* Beleg für eine zutreffende Darstellung des *gedanklichen Inhalts* der Gaußschen Bemerkung durch Sartorius. Er interpretiert nämlich die Gaußschen Präzisionsdaten lediglich unter dem Gesichtspunkt eines *nur pragmatisch* verstandenen *Schließungsfehlers* in den Messdaten eines geodätischen Dreiecks, der im Rahmen der euklidischen (Raum-) Geometrie berechnet wird. Zur Unterstützung dieser Interpretation verweist er auf die übliche Praxis der Geodäten (vor, nach und bei Gauß), in der eine Qualitätssicherung der Messdaten durch Winkelsummen in den ausgemessenen Dreiecken durch einen Vergleich mit der erwarteten Summe ($180^\circ = \pi$ im ebenen Fall, $\pi + F/R^2$ bei Dreiecksfläche F und Erdradius R im sphärischen Fall) üblich war. Im genannten Artikel wird sogar darüberhinaus grundsätzlich *bestritten*, dass es für Gauß *überhaupt möglich gewesen sein könnte*, die Daten *auch* als ein Genauigkeitsmaß für die empirische Gültigkeit der euklidischen Geometrie anzusehen. In diesem Sinne folgt Herr Breitenberger dort einer durch mathematisch-methodologische Überlegungen verfeinerten Variante des Miller-Mythos und nimmt die Überraschung darüber in Kauf, dass Gauß aus seinen Präzisionsdaten angeblich, *gegen* den sonst als glaubwürdig angesehenen Bericht des Gauß-Freundes Sartorius, “nicht mehr gemacht” habe. Immerhin wurde die Präzision der Gaußschen Messungen bis zur Einführung von Lasermessmethoden in den 1960er Jahren nicht merklich übertroffen.¹⁴

Herr Breitenberger stützt sich bei seiner Argumentation auf die “interne Evidenz”, dass Gauß in allen seinen geodätischen Arbeiten, selbst bei seinen publizierten differentialgeometrischen Grundlagenuntersuchungen (Differentialgeometrie der Flächen als “Grundlage der Grundlage” der Geodäsie) die euklidische Geometrie des einbettenden Raumes stets voraussetzte. Das warf natürlich für jeden Versuch einer empirischen Kontrollüberlegung oder gar für eine Bestimmung von Genauigkeitsschranken für die Gültigkeit der euklidischen Geometrie grundsätzliche Probleme auf. In der Tat schuf ja erst Riemann in seinem Habilitationsvortrag 1854 den begrifflichen Rahmen für

¹³Es wäre ja durchaus naheliegend, Sartorius bei der Memorierung des von Gauß angegebenen Präzisionsmaßes eine Vertauschung des Abweichungswertes der Winkelsumme ($0,6''$) mit dem auf Einzelwinkel umgerechneten ($0,2''$) zuzutrauen. Aus Gauß’ Sicht hatte die Umrechnung des Fehlers auf die Einzelwinkel durchaus Sinn; siehe dazu Anmerkung (34). Den Hinweis auf den Brief vom 28.12. 1823 an Olbers verdanke ich E. Breitenberger.

¹⁴Zum Vergleich der Gaußschen Messungen mit der später erreichten Präzision von Theodolitmessungen bis ca 1960, siehe die Verweise in (Breitenberger 1984, Anm. 35, 36, 42, 50, 52). Aufschlussreich ist dabei insbesondere die über Anm. 52 zitierte Bemerkung aus einem Geodäsielehrbuch der frühen 1970er: “... angles measured by ... theodolites between 1800 and 1950 are not necessarily inferior to those measured by modern instruments ... the long time required to complete observations ... probably resulted in better elimination of refraction errors than modern observers have time for ” (G. Bomford *Geodesy*. Oxford 3rd ed. 1971, 18, zitiert nach (Breitenberger 1984, 280)).

eine verallgemeinerte Geometrie, in dem solcherart Fragen systematisch zu klären waren.¹⁵ Nun ist aber wohlbekannt, dass Gauß dies nicht daran hinderte, Grundbeziehungen der nichteuklidischen Geometrie zu erforschen, auch *ohne* vorgängig den gesamten theoretischen Rahmen geklärt zu haben.

Zentrales methodisches Element war für Gauß die Beziehung zwischen charakteristischer Konstante C , Krümmung (extrinsisch definiert, intrinsisch bestimmbar) κ einer Gaußschen Fläche und Winkelsumme im Dreieck im Fall konstanter Krümmung

$$\alpha + \beta + \gamma - 2\pi = \kappa F, \quad (1)$$

sowie $\kappa = -C$ im Fall der nichteuklidischen Geometrie. Gl. (1) war (und ist) eine Spezialisierung des Gaußschen *Theorema elegantissimum*, d.h. des von Gauß stammenden Anteils des später nach Gauß-Bonnet benannten Satzes für den Fall konstanter Krümmung und geodätischer Dreiecke. Es ist nicht anzunehmen, dass Gauß etwa gezögert haben könnte, diese Beziehungen auch für die dreidimensionale nichteuklidische Geometrie *heuristisch* als gültig anzusehen, obgleich eine systematische Begründung von ihm nicht ausgearbeitet wurde und eine Ausarbeitung ohne die Riemannsche Verallgemeinerung seines differentialgeometrischen Ansatzes die bekannten Schwierigkeiten zu überwinden gehabt hätte. Seine Überlegungen zu den Grundlagen der Geometrie hatten ihn ja auch dort auf dieselbe Winkelsummenbeziehung geführt (nur eben mit der berühmten “Constante” C). Die eingangs zitierte Bemerkung im Brief an Taurinus über die Möglichkeit der Überprüfung der Geometrie durch “Beobachtungen auf der Erde oder am Himmel” (wie auch andere ähnlich gelagerte) sprechen in dieser Hinsicht eine klare Sprache.

Breitenberger trägt m.E. dieser heuristischen Konstellation nicht ausreichend Rechnung, wenn er die richtige (wohlbekannte) Beobachtung, dass erst Riemann in ausgearbeiteter Form “the notion of a curved threedimensional space” eingeführt hätte (p. 285) zu folgender apodiktischer Behauptung zuspitzt:

Gauss was not alluding to a test of (three-dimensional) geometry; as stressed above, he did not and he indeed could not, envisage one. He wrote in ignorance of any tangible application of hyperbolic trigonometry to some surface or object. Not only did he not possess a model in the modern sense from which he might have deduced self-consistency; he did not even possess any realization which would have made the subject accessible to geometric intuition. (Breitenberger 1984, 287)

Natürlich kannte Gauß keine “hyperbolische Geometrie” usw.; dennoch behaupte ich, dass Gauß mit den von ihm ausgearbeiteten und favorisierten

¹⁵(Breitenberger 1984, 285).

Konzepten der geodätischen Linie, einer intrinsisch durch Metrik und Krümmung bestimmten Fläche und den Winkelsummensatz im Spezialfall konstanter Krümmung, entscheidende methodisch-begriffliche Bausteine zu Verfügung standen, die es ihm möglich machten, Präzisionsmessungen “auf der Erde oder am Himmel” *heuristisch gut begründet* bezüglich ihrer Aussagefähigkeit über die Natur des physikalischen Raumes auszuwerten. Dies schloss die Möglichkeit ein, präzise Genauigkeitsschranken für die Gültigkeit der euklidischen Geometrie zu bestimmen und anzugeben. *Es bedeutet dabei keine starke Zuspitzung, eine solche Genauigkeitsschranke als informelle Fassung der Abschätzung einer mit den Messergebnissen verträglichen oberen Schranke für den Betrag der Raumkrümmung zu interpretieren.* In diesem Sinne halte ich die oben zitierte Bemerkung, “he did not even possess any realization which would have made the subject accessible to geometric intuition” für falsch. Natürlich hängt bei der Beurteilung einer solchen Aussage alles von der Interpretation “geometric intuition” ab; sicher ließen sich auch Präzisierungen angeben, die Gauß nachweislich nicht zur Verfügung standen, historisch aber nicht erhellend sind. Eine Diskussion auf dieser Ebene scheint mir fruchtlos.

Stattdessen möchte ich den von Herrn Breitenberger recht apodiktisch ausgesprochenen Zweifel in eine Serie von Problemen auflösen, die zu klären sind, damit die Frage entscheidbar wird, ob die geodätischen Präzisionsmessungen des $\triangle BHI$ im Rahmen der Gaußschen Methodologie heuristisch (und im Rahmen der Riemannschen Erweiterung exakt), als Genauigkeitsschranken für die empirische Gültigkeit der euklidischen Geometrie ausgewertet werden konnten. Jeremy Gray hat mich auf die meisten der hier zu klärenden Fragen durch beharrliches Nachfragen aufmerksam gemacht. Den Diskussionen mit ihm verdankt dieser Beitrag viel; genauer gesagt wäre er ohne diese Diskussionen nicht geschrieben worden.¹⁶

Der Übersichtlichkeit halber werde ich in Teil 4 die grundsätzlichen Probleme diskutieren, die bei dem Versuch zu berücksichtigen sind, die Raumkrümmung durch Messungen “auf der Erde” zu bestimmen, ohne mich den Restriktionen der Gauß zur Verfügung stehenden, fertig ausgearbeiteten mathematischen Theorien zu unterwerfen. Im nachfolgenden Abschnitt (Teil 5) folgt dann eine Diskussion aus der Gaußschen Sicht der 1820er Jahre. Des Kontextes wegen bitte ich die Lesenden, bezüglich der empirischen Geltung der euklidischen Geometrie lediglich das abgesicherte Wissen des frühen 19. Jahrhunderts in Rechnung zu stellen. Astronomische Parallaxmessungen verschwanden zu dieser Zeit noch im “Schmutz” der Messeffekte. Die größten gut vermessenen geodätischen Dreiecke hatten Seitenlängen in der

¹⁶Ein Dank geht auch an P. Strantzalos und M. Lambrou, denen J. Gray und ich die Gelegenheit verdanken, unsere damals noch divergierenden Auffassungen auf einem Workshop über *Συνέδριο Ιστορίας και Διδακτικής των Μαθηματικών* im April 2002 an der Universität Kreta (Heraklion) in anregender und freundschaftlicher Atmosphäre ausführlich zu diskutieren.

Größenordnung mehrer 10 km, die Standardabweichungen der Richtungsmessungen der von Gauß als Bezug dienenden niederländischen Netzmessung des Baron C. von Krayenhoff lag bei $2,7''$,¹⁷ Bei einem größeren Dreieck dieses Netzes lag der Flächeninhalt um die 300 km^2 und damit der sphärische Winkelexzess bei $1,5''$, also *unter* dem “mittleren Fehler” (Standardabweichung) einer Richtungsmessung. Schon der sphärische Exzess eines einzelnen (direkt vermessenen) Dreiecks verschwand tief im Schwankungsbereich der Messfehler.

Aus Sicht unserer Geschichte lässt sich die damit erreichte Präzision pointiert so umschreiben: Wäre jemand vor den Gaußschen Präzisionsmessungen auf die Idee gekommen, eine vermutete Raumkrümmung abzuschätzen, so hätte dies (zumindest stillschweigend) die Annahme vorausgesetzt, dass die Raumkrümmung die Krümmung der Erdoberfläche *erheblich überschreitet* (!); sonst wäre bei der bis dahin erreichten Messgenauigkeit überhaupt kein Effekt für Winkelsummenmessungen beobachtbar geworden. Diese, wie ich meine, nur scheinbar paradox klingende Umformulierung der vor Gauß erreichten Messgenauigkeit sollte deutlich machen, worum es ging, wenn man — wie Gauß — zu Beginn des 19. Jahrhunderts einen konsequenten Empirismus in Sachen metrischer Raumstruktur zu verfolgen beabsichtigte. Dabei war ja *nicht auszuschließen*,¹⁸ dass die vermutete Konstante “in einigem Verhältnisse zu (...) Größen (...) im Bereich unserer Messungen auf der Erde” stehen könnte. Wie sollte man dann aber — wenn man die a-priorische Gültigkeit der euklidischen Geometrie nicht akzeptierte — anders als empirisch sicherstellen, dass bei einer Erhöhung der Messpräzision zusammen mit den Effekten der Erdkrümmung keine Störungen auftreten können, die möglicherweise von der Raumkrümmung herrührten?

4. Bestimmung von Schranken für die Raumkrümmung aus erdgestützten Messungen

Natürlich waren bei einem Projekt der Abschätzung der Raumkrümmung durch terrestrische Messungen einige wohlbekannte Sachverhalte in Rechnung zu stellen:

Sachverhalt 1 *Zu jedem Wert s mit $\pi < s < 2\pi$ gibt es ein sphärisches Dreieck zugehöriger Winkelsumme $s = \alpha + \beta + \gamma$.*

Diese bekannte Tatsache allein schließt schon aus, die Methode der Krümmungsbestimmung durch Winkelsummenmessung in einem ebenen Dreieck

¹⁷Nach Kalkulationen von Gauß auf Basis der ihm bekannten Daten; siehe (Breitenberger 1984, 281). Dort ist fälschlich vom dänischen Gradnetz die Rede; das stand allerdings unter Leitung von H.C. Schumacher.

¹⁸Dies ist offensichtlich etwas anders, als (positiv) den entsprechenden Sachverhalt zu vermuten.

direkt (das heißt, ohne Einbeziehung weiterer metrischer Daten der Erdoberfläche) auf geodätische Dreiecke der Erdoberfläche zu übertragen; letztere können ja nach (Gauss 1828, §28) in ausreichender Genauigkeit als sphärische Dreiecke betrachtet werden.

Aber auch die Einbeziehung intrinsischer metrischer Daten der Fläche lässt nicht auf Anhieb einen Zugang zur Abschätzung der Raumkrümmung zu. Dies liegt an:

Sachverhalt 2 *Lokale Messungen (der Metrik) in einer 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit einer 3-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit lassen keinen Rückschluss auf die Krümmung des einbettenden Raumes zu.*

Man denke etwa nur an die Horosphäre des nichteuklidischen Raumes, die lokal euklidische Geometrie aufweist, oder an eine Gaußsche Fläche im euklidischen Raum, die in ihrer intrinsischen Geometrie nicht von einer isometrisch in einen nichteuklidischen Raum oder von einer in eine allgemeinere Riemannsche Mannigfaltigkeit eingebetteten Fläche unterscheidbar ist usw.. Darauf spielt Breitenberger verschiedentlich an, wenn er betont, dass die Gaußschen Berechnungen stets die euklidische Geometrie voraussetzen, anstatt sie zu überprüfen. Eine Überprüfung hat ja nur dann Sinn, wenn ihr Ausgang grundsätzlich auch negativ sein kann.

Dieser Sachverhalt wird, in unterschiedlichen Formulierungen vorgebracht, von verschiedenen Autoren als eine schlüssige *Widerlegung der Möglichkeit* überhaupt angesehen, eine Überprüfung der euklidischen Raumstruktur durch terrestrische Messungen ausführen zu können. Wie sich gleich zeigen wird, ist dies jedoch *falsch*. Wäre diese Ansicht richtig, so beruhten Gaußens Bemerkungen aus den frühen 1820er Jahren über die Möglichkeit, eine Abweichung des physikalischen Raumes von der euklidischen Geometrie eventuell durch Messungen “auf der Erde” feststellen zu können, tatsächlich auf einem Irrtum.¹⁹ Man schließe jedoch nicht zu schnell, sondern vergesse nicht:

Sachverhalt 3 *Kann man erdgestützt die Winkelsumme eines großen ebenen extrinsischen (d.h. nicht in der Erdoberfläche liegenden) Dreiecks messen oder diese aus den direkt erfolgenden Messungen rückrechnen, so erhält man aus der Gaußschen Winkelsummenbeziehung (1) eine direkte oder indirekte Information über die Raumkrümmung.*

Das hier als “extrinsisch” bezeichnete Dreieck kann durch Lichtstrahlenverbindungen zwischen Bergspitzen (etwa $\hat{B}, \hat{H}, \hat{I}$) realisiert werden, die über die Oberfläche \mathcal{F} der mathematischen Erdgestalt (Sphäre, Ellipsoid oder Geoid) hinausragen und direkte Sichtverbindung untereinander zulassen. Das Dreieck kann und wird im allgemeinen schief, also nicht parallel zu den drei Tangentialebenen an \mathcal{F} in den orthogonal unter den Bergspitzen

¹⁹Man denke etwa an Seeligers “Makel” auf dem Bild des wissenschaftlichen “Heroen” Gauß.

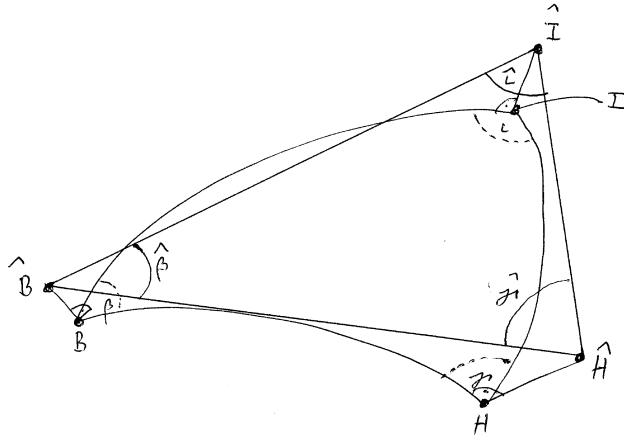


Abbildung 1: Geodätisches Dreieck und Lichtstrahlendreieck

liegenden Punkten $B, H, I \in \mathcal{F}$ liegen. Die Orthogonalität kann als durch Schwerkraftwirkung definiert angesehen werden (Verträglichkeit der Lichtstrahlengeometrie mit der Orthogonalitätsbeziehung bezüglich Schwerfeld unterstellt).²⁰ Weiter wird hier auf Lichtstrahlen als bestmögliche empirische Realisierungen für Geodätische Bezug genommen. Dies schließt Korrekturen bei der Messauswertung, die Beugung durch Lufteinflüsse auf die Lichtausbreitung als Fehlerquelle betrachten und zu kompensieren versuchen, ausdrücklich mit ein und entspricht einer treuen Interpretation der Gaußschen Praxis (und der späterer Akteure).²¹ Genau genommen geht und ging es also um eine so weit wie möglich *von Atmosphäreneinflüssen bereinigte Geometrie der Lichtstrahlen*. Die Höhen von $\hat{B}, \hat{H}, \hat{I}$ über dem von Gauß verwendeten Referenzellipsoid betrugen jeweils 1156 m (Brocken), 508 m (Hohehagen) und 916 m (Inselsberg).²²

Nun wirkt sich eine mögliche Abweichung der extrinsischen Lichtstrahlen-Geometrie vom euklidischen Fall auf die Winkelsumme im $\triangle \hat{B}\hat{H}\hat{I}$ aus und damit auch auf die bei B, H, I in die jeweiligen Tangentialebenen an \mathcal{F} projizierten Winkel und deren Summe. Gemessen werden aber in der geodätischen Praxis nicht die in der Ebene durch $\hat{B}, \hat{H}, \hat{I}$ liegenden Winkel $\hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ des Dreiecks $\triangle \hat{B}\hat{H}\hat{I}$, sondern die orthogonal in die Tangentialebenen an \mathcal{F} projizierten Winkel β, γ, δ . Dies ist ein Ergebnis des Messverfahrens selber und

²⁰Die Orthogonalitätsbeziehung wird also genau genommen zum Geoid betrachtet. Dies kann aber für die folgenden Überlegungen in ausreichender Approximation mit dem Referenzellipsoid zusammenfallend angesehen werden.

²¹Vergleiche dazu auch (Breitenberger 1984, 282).

²²Werte angegeben nach (Breitenberger 1984, 279 ,283).

erfordert keine zusätzlichen Rechnungen: Nach einer “Horizontierung des Theodolits” (das heißt Einrichtung des Instrumentes in die Horizontalebene) wird die Winkeldifferenz (“Azimut”) der Peilrichtung (genau genommen der Vertikalebene durch den Peilstrahl) zur Südrichtung abgelesen. Die Winkel des geodätischen Dreiecks BHI ergeben sich als Differenz der Azimute der jeweiligen Richtungen BH, BI usw..²³

Es ist nun abzuschätzen, wie sich eine kleine Abweichung der extrinsischen Raumgeometrie von der euklidischen Metrik, etwa mit (konstanter Schnitt-) Krümmung $\hat{\kappa}$ ($|\hat{\kappa}| \ll 1$, für Gauß $\hat{\kappa} < 0$), auf die geodätischen Winkelmessungen auswirken würde. Wir gehen zur Vereinfachung davon aus, dass durch unabhängige *intrinsische* Messungen die metrischen Daten der Erdoberfläche \mathcal{F} bekannt seien (mittlere Krümmung, Hauptkrümmungen des Ellipsoids), sowie die Koordinaten der Dreieckspunkte B, H, I und damit der Flächeninhalt $F(\Delta)$ des durch Projektion der Lichtstrahlenverbindungen gewonnenen geodätischen Dreiecks $\triangle BHI$.²⁴ Die Winkel $\hat{\beta}$ usw. weichen von einem bei euklidischer Raumgeometrie angenommenen Wert $\hat{\beta}_0$ nur um einen

²³Diese Berechnung der Winkel aus den Gaußschen Azimutdaten beschreibt auch Breitenberger auf seiner p. 284. Unglückseligerweise gibt er an anderer Stelle eine irrtümliche Beschreibung der Arbeitsgänge, die Gauß bei der Auswertung der Messdaten angeblich ausführen musste. Dazu zählt er vier Arbeitsschritte auf, von denen er die ersten beiden wie folgt beschreibt: “The data first had to be reduced to uniform station height; for this he used formulae of his own (...). Then the lines of sight, which form the edges of a polyhedron inscribed into a sphere, were projected onto the sphere from its center, becoming arcs of great circles, and the sum of the angles in the resulting spherical triangles had to be increased over 180° by the spherical excess which for each triangle would be calculated from its size...” Es folgen zutreffende Beschreibungen des Fehlerausgleichs und der Berechnung von Koordinaten (Breitenberger 1984, 280). Da für die gesamte weitere Diskussion entscheidend ist, welche Daten direkt gemessen werden und welche durch theoretische Rückrechnung zu erhalten sind, ist hier deutlich darauf hinzuweisen, dass bei den beiden ersten hier aufgeführten Schritten theoretische Beschreibung und Auswertung in irreführender Weise miteinander vermengt werden. Tatsächlich erfolgt ja die Peilung längs der Kanten eines Polyeders, dem auf die hier beschriebene Weise ein der Erdgestalt einbeschriebenes Polyeder zugeordnet werden kann (aber nicht muss). Die Winkelbestimmung wird bei dieser Beschreibung aber gänzlich auf den Kopf gestellt. Durch Differenzbildungen der direkt gemessenen Azimutwerte werden — wie hier im Haupttext beschrieben und von E. Breitenberger im Fall der Gaußschen Werte für das Dreieck BHI sogar vorgeführt (!) — die Winkel eines aus dem Polyeder-Dreieck auf die Fläche projizierten geodätischen Dreiecks bestimmt. Der sphärische Exzess wird — wie von Gauß vorexerziert — umgekehrt eingesetzt, um die Winkel eines seitengleichen ebenen Dreiecks zu bestimmen (von Gauß verallgemeinerter Satz von Legendre)! Schon der erste in Breitenbergers Text angegebene Schritt scheint auf einem Missverständnis zu beruhen: Die Projektion der Winkel in die Tangentialebene ist wie oben beschrieben gewissermaßen “in den Messprozess eingebaut”, eine Reduktion auf gleiche Stationshöhe ist für die Bestimmung der Azimute und damit der geodätischen Winkel nicht erforderlich. Ich danke Herrn Heindl, numerischer Mathematiker und gelernter Geodät, für die ihm leicht fallenden, in diesem Kontext äußerst hilfreichen Erläuterungen über Theodolitmessungen.

²⁴Zur Diskussion, inwieweit diese Vereinfachung durch die bei Gauß vorliegende Messpraxis abgedeckt erscheint, siehe unten.

kleinen Betrag $\Delta\hat{\beta}$ etc. ab, die Winkelsummenabweichung sei ϵ :

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_0 + \Delta\hat{\beta}, \quad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_0 + \Delta\hat{\gamma}, \quad \hat{\iota} = \hat{\iota}_0 + \Delta\hat{\iota}$$

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\gamma}_0 + \hat{\iota}_0 = \pi, \quad \Delta\hat{\beta} + \Delta\hat{\gamma} + \Delta\hat{\iota} =: \epsilon$$

Eine elementargeometrische Überlegung und Reihenentwicklung zeigt, dass die unterstellten nichteuklidischen Winkeldeformationen $\Delta\hat{\beta}$ usw. sich bei der Orthogonalprojektion in erster Näherung mit einem nahe bei 1 liegendem Faktor als Änderungen der Winkel gemessenen geodätischen Winkel β, γ, ι auswirken (siehe Anhang, Gl. (5)). Es ergibt sich also:

Sachverhalt 4 (a) *Eine kleine Abweichung der Winkelsumme im Dreieck $\hat{\Delta} := \Delta\hat{B}\hat{H}\hat{I}$ um $\epsilon = \hat{\kappa} \cdot F(\hat{\Delta})$ vom euklidischen Wert π wirkt sich in guter erster Näherung als gleichgroße Abweichung der Summe der auf der Sphäre gemessenen Winkel β, γ, ι vom erwarteten sphärischen Wert aus:*

$$\beta + \gamma + \iota - \pi \approx \frac{1}{R^2} \cdot F(\Delta) + \epsilon \quad (2)$$

(R mittlerer Erdradius, $F(\Delta)$ Flächeninhalt des Dreiecks Δ).

In umgekehrter Richtung folgt:

Sachverhalt 4 (b) *Eine angenommene extrinsische Raumkrümmung $\hat{\kappa}$ wirkt sich bei Vermessung “großer” geodätischer Dreiecke Δ als systematischer Anteil ϵ' des “Schließungsfehlers” der auf den euklidischen Fall umgerechneten Winkelsumme aus. Dieser wird beim Flächeninhalt $F(\Delta)$ des Dreiecks in erster Näherung abgeschätzt durch:²⁵*

$$\epsilon' \approx \hat{\kappa} \cdot F(\Delta) \quad (3)$$

Wie schon Ende des letzten Abschnittes erwähnt, lag der Schließungsfehler bei Messungen geodätischer Dreiecke bis etwa 1820 *über* dem sphärischen Exzess. Allein schon deswegen wäre es unmöglich gewesen, auf der vorliegenden empirischen Grundlage eine Abschätzung der Raumkrümmung wie in (3) auch nur zu erwägen. Hinzu trat, dass die oben gemachte Voraussetzung (Gewinnung der metrischen Erddaten durch intrinsische Messungen, Bestimmung der Koordinaten der Dreieckspunkte durch unabhängige Messungen) für die vor-Gaußschen Messungen kaum als erfüllt angesehen werden konnten, da das zur Prüfung verwendete Dreieck Teil des Bezugsnetzes und von derselben Größe wie die Netzdreiecke war.

Bei der Gaußschen Messung verhielt sich das anders: Das “große” Dreieck BHI hatte Seitenlängen (69 km (BH), 85 km (HI), 107 km (BI)) und war damit den Seitenlängen nach um etwa den Faktor 5, der Fläche nach um eine

²⁵Hierbei wurde als weitere Näherung $F(\hat{\Delta}) \approx F(\Delta)$ verwendet.

ganze Größenordnung größer als die üblichen Netzdreiecke geodätischer Messungen, einschließlich jener, die zur Bestimmung der Erdgestalt gedient hatten (oder Gauß zur Datenkorrektur dienten). Ging man davon aus, dass bei den *kleineren Netzdreiecken* auch bei den von Gauß verbesserten Messmethoden ein eventueller Einfluss der Raumkrümmung nicht nachzuweisen war, so konnte man die daraus abgeleiteten metrischen Werte mit gutem Grund als zur *intrinsischen Geometrie* der Erdoberfläche im Sinne der Gaußschen Flächentheorie gehörend ansehen. Die Peillinien des Netzes, die im einbettenden Raum verliefen, lagen ja offenbar in so kleinen Stücken des Raumes, dass letztere ausreichend gut euklidisch darstellbar waren. In der Sprache der Riemannschen Mannigfaltigkeiten hieße das: Jedes einzelne Lichtstrahldreieck war ausreichend genau (d.h. im Rahmen der Messgenauigkeit) in einem Tangentialraum an die Mannigfaltigkeit darstellbar, das darunter liegende geodätische Dreieck entsprechend auf einer euklidischen Sphäre zu betrachten.

Darüberhinaus hatte Gauß Wert darauf gelegt, das große Dreieck individuell mit höchster Genauigkeit zu vermessen und die Bestimmung seiner Grunddaten nicht in den Netzausgleich des nach Hamburg verlaufenden eigenen Netzes, des südlich anschließenden seines kurhessischen Kollegen Gerling oder des im Westen liegenden niederländischen Netzes des Barons von Krayenhoff einzubeziehen.²⁶ Methodisch hatte Gauß also darauf geachtet, dass das Dreieck außerhalb der Referenznetze lag und in diesem Sinne diesem “methodisch extrinsisch” war. Insofern ist die Überlegung von *Sachverhalt 4a* und *4b* auf das Gaußsche $\triangle BHI$ (bzw. $\triangle \hat{B}\hat{H}\hat{I}$) begründet anwendbar.

Mit Flächeninhalt $F(\triangle) \approx 2920 \text{ km}^2$ (aus Gauß’ Wert $14,86''$ für den sphärischen Winkelexzess und seinem Wert für den Erdradius $R \approx 6370 \text{ km}$ berechnet) und Schließungsfehler $\epsilon' \approx 0,6''$ gibt eine einfache Überschlagsrechnung²⁷ für die Raumkrümmung $|\hat{\kappa}| = 1/r^2$ die Schranke

$$r > 5R \approx 3 \cdot 10^4 \text{ km} \quad \text{beziehungsweise} \quad |\hat{\kappa}| < 10^{-9} \text{ km}^{-2}. \quad (4)$$

Es war also durchaus möglich, eine obere Schranke für eine mit den Gaußschen geodätischen Messungen verträgliche Raumkrümmung zu bestimmen. Das lag nicht nur an der erhöhten Genauigkeit um etwa eine Größenordnung, sondern auch daran, dass Gauß seine Messungen so organisiert hatte, dass eine Kontrollüberlegung dieser Art überhaupt methodisch gerechtfertigt erschien. Sehr viel mehr war von terrestrischen Messungen kaum zu erwarten.²⁸ Wenn der physikalische Raum gekrümmt sein sollte, so lag nun die untere Schranke für den Krümmungsradius jedenfalls merklich jenseits des Erdradius: $r > 5R$. Das erscheint aus astronomischer

²⁶(Gerardy 1955).

²⁷Etwa $F/R^2 \approx 14''$, $F/r^2 < 0,6''$, also $r/R > \sqrt{14/0,6} \approx 5$.

²⁸Wie (Breitenberger 1984, 282) es ausdrückt: “[Gauss] had by 1823 attained geodetic standards which were essentially unsurpassed one-and-a-half century later”.

Sicht als lächerlich gering; man berücksichtige aber, dass bis 1838 keine verlässlichen Werte für Parallaxmessungen vorlagen und daher jeder Versuch einer quantitativen Auswertung astronomischer Messungen für Abschätzungen der Raumkrümmung fast wörtlich zu lesen in der Luft (genauer im “Äther”) hing.

Diese Auswertung hat bis hierher theoretische Methoden und Begriffe herangezogen, die Gauß nicht ausformuliert zur Verfügung standen. Es bleibt also zu diskutieren, welche Aspekte der hier “modernisiert” vorgetragenen (allerdings schon ab 1854 durchführbaren) Analyse ihm auf seine Weise zugänglich gewesen sein konnten.

5. Was war für Gauß abschätzbar?

So klar es ist, dass Gauß in den 1820er Jahren *in ausgearbeiteter Form* keine 3-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten kannte (nicht einmal konstanter Krümmung), so klar zeigt seine Korrespondenz, dass er seit etwa 1816 von der logisch-begrifflichen Möglichkeit einer konsequenten nichteuklidischen Fassung der Geometrie überzeugt war.²⁹ Das ist in der Wissenschaftsgeschichte unumstritten. Auch ist bekannt, dass ihn dabei insbesondere interessierte, wie die bekannten metrischen Beziehungen der euklidischen Geometrie, etwa die des Winkelsummensatzes, modifiziert werden. Einen Satz wie den oben zitierten an Taurinus (“Wäre die Nicht-Euklidische Geometrie die wahre, und jene Constante in einigem Verhältnisse zu solchen Größen, die im Bereich unserer Messungen auf der Erde oder am Himmel liegen, so ließe sie sich a posteriori ausmitteln”), kann man daher im Sinne des obigen *Sachverhalts 3* interpretieren, ohne die Gaußsche Perspektive auch nur einen Deut zu überschreiten. Kurz formuliert:

Sachverhalt 3 war für Gauß klar.

Ebenso bedurfte Gauß keineswegs einer Einordnung in die entfaltete Theorie Riemannscher Mannigfaltigkeiten um zu sehen, dass die NEG im Kleinen durch die euklidische Geometrie approximiert wird, insbesondere und umso genauer je kleiner die “Constante” $C = |\kappa| \ll 1$ ist, egal ob im ebenen oder im räumlichen Fall.

Damit war aus seiner Perspektive völlig naheliegend, die Vermessung der Erddaten auch dann in guter Approximation als Sachverhalt der intrinsischen Geometrie der Erdoberfläche anzusehen, wenn er für Kontrollüberlegungen der empirischen Grundlagen die Geometrie des physikalischen Raumes als nichteuklidisch, aber eben mit kleinem C , ansah. Dies ist keine methodologische Widersprüchlichkeit, sondern legitime und gut gestützte Vorgehensweise empirischer mathematischer Naturwissenschaft.

Da im “sehr” Kleinen für die Raumgeometrie auch bei Annahme $C > 0$ mit großer Genauigkeit die euklidische Geometrie gilt, war und ist es

²⁹(Stäckel 1918), siehe auch (Reichardt 1976, 25ff.)

selbstverständlich, dass die Projektion der Winkel des Lichtstrahlendreiecks $\triangle \hat{B}\hat{H}\hat{I}$ euklidisch approximiert werden kann.³⁰ Dass dabei eine kleine Winkelsummenabweichung des Lichtstrahlendreiecks vom euklidischen Wert proportional (und mit nahe an 1 liegendem Proportionalitätsfaktor) auf die Theodolitmessungen des geodätischen Dreiecks $\triangle BHI$ durchschlagen würde, konnte Gauß — zumindest in einem *heuristischen Sinne* — problemlos annehmen. Falls er sich die Frage genauer stellte, wa eine Abschätzung, wie hier im Anhang erläutert, ein “neben dem Morgenkaffee” zu erledigendes Problem. Nimmt man die Bemerkung an Taurinus, die von Sartorius zitierte und andere zusammen und liest sie im Kontext seiner geodätischen Arbeiten der frühen 1820er Jahre, so wird man kaum daran zweifeln können, dass Gauß sich mit Fragen dieser Art befasste. Die Einschätzung, ob Gauß sich genau mit der *hier diskutierten* Frage beschäftigt hat, bleibt der Leserin überlassen, solange nicht eventuell noch eigenhändige schriftliche Dokumente von Gauß gefunden werden, die dies eindeutig entscheiden. Ich selber bewerte die vorliegenden Quellen samt Rekonstruktion der für ihn einsehbaren Theorieperspektive als einen *guten* historischen *Indizien*-Beweis.

Wir können also festhalten:

Der Inhalt von Sachverhalt 4a bzw. 4b war für Gauß zumindest heuristisch gut abschätzbar. Die zugrunde liegende Frage oder eine nahe verwandte, wird er sich gestellt haben müssen, wenn man seine Äußerungen zur empirischen Bedeutung der Grundlagenfragen der Geometrie berücksichtigt und ernst nimmt.

Wir kommen so zu der Schlussfolgerung, dass es für Gauß sehr nahe lag zu prüfen, ob bei den größten auf der Erde vermessbaren Dreiecken ein systematischer Anteil des Schließungsfehlers feststellbar ist, der auf eine schon auf terrestrischem Niveau wahrnehmbare Abweichung der Raumkrümmung von 0 hinweist. *Die Antwort auf diese Frage war nach den Messungen von 1823 klar negativ.* Die Schließungsfehler einiger kleiner Dreiecke des Hannoveranischen Netzes lagen zum Teil über 1' und übertrafen damit den des “großen” Dreiecks erheblich; und selbst noch der “mittlere Fehler” der bei den Ausgleichsrechnungen ermittelten Richtungskorrekturen des gesamten Netzes (ohne Einbezug des “großen” Dreiecks) lag bei 0,48", wie Gauß 1823 im November an Bessel mitteilte,³¹ und damit nur wenig unter dem des $\triangle BHI$.

Allerdings ist noch eine kritische Rückfrage zu bedenken: Warum gibt es

³⁰Die entsprechende Approximationsüberlegung ist natürlich auch ohne Tangentialräume an Mannigfaltigkeiten durchführbar. Sie muss dann eben nur anders (aus unserer Sicht etwas umständlicher) formuliert werden. Bei der Projektion in den Eckpunkten des Dreiecks geht es um die Darstellung räumlicher Gebiete in der Größenordnung von jeweils 1 m (in alle drei Raumdimensionen). Es reicht ja, die Projektion in eine Parallelebene zur Tangentialebene an das Geoid durch den Messpunkt vorzunehmen, in dem der Theodolit steht.

³¹(Gauss Werke, IX, 366), zitiert auch in (Breitenberger 1984, 282).

keinen Hinweis auf Versuche von Gauß, die Winkel des Lichtstrahlendreiecks $\triangle \hat{B}\hat{H}\hat{I}$ direkt zu messen, wenn er wirklich Interesse daran hatte, an diesem Fall die Größenordnung der von ihm vermuteten Raumkrümmung zu überprüfen?³² Wäre das nicht einfacher, als all die verwickelten Überlegungen zum Verhältnis von euklidischer und nichteuklidischer Geometrie in Kauf zu nehmen, die hier zu diskutieren waren und die die mathematikhistorische Diskussion so irritiert haben? Und ist nicht das Fehlen jedes Nachweises einer direkten Winkelmessung des ebenen großen Dreiecks ein Hinweis darauf, dass doch alles anders war, und Gauß nichts anderes erreichen wollte als einen besseren Schließungsfehler als alle Vorgänger, aber eben doch nur aus Sicht der traditionellen Geodäsie?

So nahe diese Frage an den Kern der Überlegungen herankommt, so wenig liefert sie einen weiteren (den letzten ?) Einwand gegen die Glaubwürdigkeit der von Sartorius berichteten Gaußschen Auswertungsüberlegung der Messungen von 1823. Man muss sich nur vergegenwärtigen, was Gauß hätte tun müssen, um die Winkel der Ebene $\hat{B}\hat{H}\hat{I}$ direkt zu vermessen. Noch die kleinste Schwierigkeit wäre gewesen, dass er König Georg IV die Finanzierung eines dritten Messtrupps hätte schmackhaft machen müssen (obwohl selbst das möglicherweise nicht leicht gewesen wäre, weil ein geodätischer Nutzen nicht zu versprechen war). Die Heliotropmessungen machen dann ja nicht nur im Hauptmesspunkt (etwa auf dem Hohehagen bei der Messung des Winkels $\angle \hat{B}\hat{H}\hat{I}$) einen Messtrupp notwendig, sondern je einen weiteren in den beiden anderen Dreieckspunkten (auf dem Brocken und dem Inselsberg), um die beiden Heliotropen zur Markierung der Zielpunkte der Visierlinien einzurichten. Aber das Hauptproblem wäre ein anderes gewesen: Es wäre nämlich ein völlig neuartiges Messinstrument erforderlich geworden, mit dem simultan oder in kurzer zeitlicher Aufeinanderfolge zwei optische Achsen ausgerichtet und eingemessen werden können, um dann den dazwischen liegenden Winkel in einer geeigneten Ebene mit höchster Präzision zu vermessen. Mit einem Theodoliten, selbst mit dem von Gauß verbesserten, war und bleibt eine solche Messung unmöglich.³³

Es bleibt also dabei: Die in Sartorius' Bericht angedeutete *Methode, den Schließungsfehler selbst als ein Schrankenkriterium für die Raumkrümmung*

³²Wieder so eine Frage Jeremy Grays, die direkt den Kern unserer Geschichte erhellt.

³³An dieser Stelle wirkt sich die irreführende Darstellung der von Gauß angeblich ausgeführten Schritte bei der Auswertung der Messungen von Herrn Breitenberger (1984, 280) erheblich aus (siehe Anm. (22)). Sie erweckt den Eindruck, als wären die Winkel des Lichtstrahlendreiecks messmethodisch primär und die projizierten Winkel des geodätischen Dreiecks daraus im "zweiten Schritt" erst nachträglich zu berechnen. In Wirklichkeit ist jedoch die Projektion der Winkelmessung in die Tangentialebene durch die Horizontierung des Theodolits gewissermaßen schon in den Messprozess eingebaut. Die (dazu schief liegenden) Winkel des Lichtstrahlendreiecks können mit dem Theodoliten überhaupt nicht direkt gemessen werden. Ihre Berechnung ist weder für die geodätische Auswertung noch für deren Auswertung als Genauigkeitsschranke für die Gültigkeit der euklidischen Geometrie nötig, wenn man das Schließungskriterium wie oben erläutert einsetzt.

zu verwenden, bleibt im Rahmen der vorhandenen Messinstrumente erheblich einfacher und durch leichte Zuspitzung der üblichen geodätischen Messmethoden (Auswahl und Abtrennung eines “großen” Dreiecks vom Netz, Messung mit der höchsten erreichbaren Präzision für Einzeldreiecke) realisierbar. Dabei sei hier noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass dazu keine Rückrechnung auf die einzelnen Winkel des Lichtstrahlendreiecks $\triangle \hat{B}\hat{H}\hat{I}$ erforderlich war,³⁴ sondern allein die Abweichung der *Winkelsumme* berücksichtigt werden musste. Dabei war es lediglich eine Frage des Geschmacks, der Anschaulichkeit oder der direkten Vergleichbarkeit, den Schließungsfehler bezüglich der erwarteten sphärischen Winkelsumme ($180^\circ 0' 14,85 \dots''$) oder der um den sphärischen Exzess bereinigten ebenen Winkelsumme (“zwei Rechte”) anzugeben.

So gibt uns das Ergebnis dieser Rücküberlegung noch einmal eine Bestätigung dafür, dass das von Sartorius angegebene Kriterium auf eine höchst sinnvolle Methode der Überprüfung hinweist.

Dies gilt allerdings nur, wenn man bereit ist, die Gaußsche Frage nach einer möglichen Größenordnung der Raumkrümmung in einem “Verhältnisse zu solchen Größen, welche im Bereich unserer Messungen auf der Erde” liegen, überhaupt als ein sinnvolles Problem anzuerkennen.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Gauß hätte nur dann Grund gehabt, der Frage eines eventuellen terrestrischen Nachweises der Krümmung des physikalischen Raumes nach 1823 weiter nachzugehen, wenn beim großen Dreieck ein auffällig großer negativer Schließungsfehler aufgetreten wäre. Tatsächlich lag jedoch die aus dem (negativen) Schließungsfehler zu ermittelnde Korrektur der einzelnen Winkel bei $0,2''$ und damit sogar noch unterhalb des “mittleren (quadratischen) Fehlers” (der empirischen Standardabweichung $\sigma = 0,48''$) der Ausgleichskorrekturen von Einzelrichtungen, die Gauß bei seinem Netzausgleich anzubringen hatte.³⁵ Aus Sicht des 20. Jahrhunderts, also hier der allgemeinen Relativitätstheorie, ist dieses negative Ergebnis nicht verwunderlich. Die Abschätzung der

³⁴Wollte man das auf der Basis von Theodolitmessungen machen, so wäre eine die erreichbare Präzision weit überschreitende Genauigkeit bei der Bestimmung der sehr kleinen Neigungswinkel des Dreiecks gegen die jeweilige Tangentialebene an das Schwerfeld der Erde notwendig. Höhenwinkel sind mit guten Instrumenten “heute” (2003) bis auf $0,1''$ messbar; sie wären aber unbrauchbar zur Bestimmung der schiefen Winkel des $\triangle \hat{B}\hat{H}\hat{I}$, weil die atmosphärische Refraktion über so lange Wege sehr schwer kontrollierbar ist. Daher würde der systematische Fehler bei kleinen Höhenwinkeln das Ergebnis schlicht unbrauchbar machen (Auskunft von Herrn Heindl).

³⁵Sollte Gauß einen entsprechenden Vergleich in seinen mündlichen Mitteilungen an Sartorius von Waltershausen angestellt haben? Dies zu behaupten wäre vielleicht zu waghalsig; es ist aber keineswegs auszuschließen. Den Wert $0,48''$ als “mittlere(n) Fehler aller Richtungen, verstanden wie in meiner *Theoria Combinationis*” bezüglich der Ausgleichungen aller Hauptdreiecke der Messungen von 1821 bis 1823 gab Gauß jedenfalls schon in seinem Briefwechsel mit Olbers am 2. 11. 1823 an (Gauss Olbers, II, 260).

Auswirkungen des Gravitationsfeldes der Erde für die Lichtstrahlengeometrie eines Dreiecks der Größenordnung des $\triangle BHI$ durch eine Schwarzschild-Metrik führt auf eine Winkelsumme $\pi + 3 \cdot 10^{-13}$ (Richter 2000).³⁶ Es ergibt sich damit eine (positive) relativistische Winkelkorrektur in der Größenordnung $10^{-8}''$, also noch einmal vier Größenordnungen unterhalb des von Gauß in den *Disquisitiones* abgeschätzten Nichtsphärizitätseffektes bei Anwendung des verallgemeinerten Legendre-Theorems.

Nichts davon war zu Beginn des 19. Jahrhunderts a priori absehbar. Wäre es anders gekommen, hätte also Gauß eine signifikante Abweichung der Winkelsumme gefunden, so wäre natürlich weit mehr als nur *eine* Auswertungsrechnung des *einen großen* Dreiecks erforderlich geworden. Das Auftreten eines solchen von Gauß bis 1823/24 offenbar grundsätzlich für möglich gehaltene Effektes wäre wohl nur der Auftakt für ein neues umfangreicheres Projekt geworden, die Raumkrümmung zu vermessen. Es bleibt uns erspart zu diskutieren, welche Verbesserungen bei der Messung der Erddaten, der Auswahl und Koordinatenbestimmung geeigneter Beobachtungspositionen für "große" Dreiecke, des Ausschlusses atmosphärischer Effekte, der angewendeten verbesserten Messmethoden der Dreieckswinkel etc. im Rahmen eines solchen fiktiven Projektes "terrestrische Messung der Raumkrümmung" notwendig geworden wären.³⁷ Es ist aber ein Scheinargument, dass all dies methodologisch unmöglich gewesen wäre; und auch das Kopfschütteln von besserwissenden Spätergeborenen, ein Gauß könne doch nicht im irdischen Maßstab statt im astronomischen nach möglichen Effekten der Raumkrümmung gesucht haben, geht an der historischen Situation der 1820er Jahre vorbei, in denen glaubwürdige Parallaxdaten nicht vorlagen und nicht abzusehen war, wann sie zur Verfügung stehen würden.

Gauß' eigene (terrestrische) Messungen waren zwischen 1823 und 1838 die verlässlichsten Daten zur empirischen Bestimmung einer oberen Schranke des Betrags der Raumkrümmung (der "Constanten" der nichteuklidischen Geometrie)

$$C = |\kappa| < 10^{-9} \text{ km}^{-2} \approx 0,04 R^{-2}.$$

Wie oben gezeigt, ist nur eine einfache, aus Gauß' Sicht methodologisch naheliegende Dreisatzrechnung erforderlich, die von Sartorius überlieferten Gaußsche Angabe der Schranke in diese Form der Gl. (4) zu bringen.

Auch ist gut zu verstehen, warum sich die Gaußschen Äußerungen zur Größenordnung der von ihm erwogenen Raumkrümmung ab Mitte der 1820er Jahre merklich veränderten. In dem nun schon häufig angeführten Brief an Taurinus im November 1824, ein Jahr nach den Messungen des Dreiecks *BHI*, aber noch während der Auswertungsarbeiten³⁸ ließ Gauß durchaus

³⁶Den Hinweis auf diese Berechnung verdanke ich E. Breitenberger.

³⁷Hinzu tritt natürlich, dass unter der höchst fiktiven Annahme eines nachweisbaren Effektes der Raumkrümmung für die Winkelsummenmessungen die Abweichung *positiv* gewesen wäre.

³⁸Die Netzmessungen liefen noch im ganzen Jahr 1824, die grundlegenden Auswertungen

noch zu, wenn auch natürlich im Konjunktiv, dass sich “jene Constante” gegebenenfalls durch “Messungen auf der Erde oder am Himmel . . . ausmitteln” lasse.

Am Ende seiner Auswertungen wusste er es besser. Im Sommer 1831 schrieb er in einer — für seine Verhältnisse recht ausführlichen — Erläuterung über seine Einsicht in die NEG an H.C. Schumacher von jener “Constante” (die nun k hieß):

k [ist] eine Constante (...) von der wir durch Erfahrung wissen, dass sie gegen alles durch uns messbare ungeheuerlich gross sein muss. In Euklids Geometrie wird sie unendlich. (Gauss Werke, VIII, 215) zitiert nach (Reichardt 1976, 35)

Im Lichte der hier zusammengestellten Evidenz handelt es sich bei seinen unterschiedlichen Formulierungen über die von ihm für möglich gehaltene empirische Nachweisbarkeit der “Constante” nicht, wie manchmal dargestellt, um eine Unentschiedenheit von Gauß, sondern um Unterschiede, die in wohlformulierter Weise eine zeitliche Entwicklung des von Gauß als gesichert angesehen Wissens andeuten.

Dies gilt offensichtlich auch für Gauß’ Hinwendung zu astronomischen Messungen zur Bestimmung der Raumkrümmung. Ende der 1820er Jahre war für ihn geklärt, dass die Konstante $|\kappa|$ unterhalb der Nachweisbarkeit bei Messungen “auf der Erde” (lies: für geodätische Messungen) liegt. Naheliegenderweise richtete sich sein Augenmerk nun stärker auf astronomische Nachweismöglichkeiten. Deren Problematik war, dass bei dem Versuch einer direkten Beobachtung die Aberration des Lichtes (durch den Einfluss der Erdbewegung auf den Richtungsvektor des einfallenden Strahles) eine stärkere scheinbare Positionsveränderung hervorruft (in der Größenordnung $1''$) als der eigentliche trigonometrische Parallaxeffekt (Größenordnung $\leq 0,1''$). Trotz dieser schon von J. Bradley 1729 aufgewiesenen Problematik gab es zu Beginn des 19. Jahrhunderts verschiedene Ankündigungen von “Parallaxmessungen” in der Größenordnung $1''$, die allerdings unter den Astronomen zurecht umstritten blieben. Für Gauß waren sie alle indiskutabel. Die Lage für Parallaxmessungen änderte sich erst im Jahre 1838 mit F.W. Bessels Erfolg bei der Bestimmung der parallaktischen Verschiebung von 61 Cygni gegenüber zwei naheliegenden anderen Sternen ($0,314'' \pm 0,02$). In kurzer Zeit folgten nun weitere (stabile) Parallaxmessungen nach dieser Methode durch W. Struve und T. Henderson, darunter für α Centauri (etwa $0,6''$).³⁹

Lobatschewsky hatte schon im Jahre 1830 eine Abschätzung der Raumkrümmung mit einem idealisierten, aber theoretisch grundsätzlich gut begründeten Modell erreicht (Gauß an Schumacher, 7.1. 1825), die Ausgleichsrechnungen schloss Gauß erst im Mai 1826 endgültig ab (Brief an Olbers, 14.5. 1826); siehe (Gerardy 1955, 100–103).

³⁹Siehe (North 1997, 254, 279).

teten Argument vorgenommen. Dabei berief er sich allerdings auf eine dieser problematischen “Parallaxbeobachtungen” (von 1,24'' für den Sirius).⁴⁰

Wie wir wissen, begann Gauß ab etwa 1841 mit einem Studium der Arbeiten Lobatschewskys. Da er ab 1838 russisch lernte, ist es gut möglich und bei seinem Interesse an der Problematik sogar anzunehmen, dass er in den 1840er Jahren die entsprechende Überlegung von Lobatschewsky kennen lernte. Unter den neuen empirischen Bedingungen der Parallaxmessungen seit 1838 lagen nun alle Bedingungen dafür bereit, das Problem der Raumkrümmung durch astronomische Messungen neu, und nun präzise, zu behandeln. Wiederum gibt es einen Zeitzeugen, diesmal B. Listing, der darüber berichtete, dass Gauß in den 1840er Jahren in seinem Seminar über dieses Problem sprach.⁴¹ Zu diesem Zeitpunkt spielte die Erwähnung einer möglichen Bestimmung der Raumkrümmung durch terrestrische Messungen schon keine Rolle mehr.

Wahrscheinlich erfuhr Bernhard Riemann von dem von Gauß nun neu gestellten Problem einer Abschätzung der Raumkrümmung aus Parallaxmessungen direkt oder indirekt im Umkreis seines schwer zugänglichen Lehrers. Jedenfalls gab er in seinem Habilitationsvortrag 1854 ein knappes, aber sehr prägnantes Argument für eine Abschätzung der Raumkrümmung aus astronomischen Messungen an. Riemann wandte (nach einer naheliegenden Rekonstruktion)⁴² dieselbe Idee, die Gauß der Abschätzung aus terrestrischen Messungen zugrunde gelegt hatte, auf astronomische Beobachtungen an — nun allerdings theoretisch besser fundiert im Rahmen seiner Geometrie der (Riemannschen) Mannigfaltigkeiten. Er erhielt so eine von ihm in verbaler Form, aber völlig präzise angegebene Schranke für die räumlich gemittelte Raumkrümmung. Mit einem etwas anderen Argument, aber mit quantitativ gleichem Ergebnis im hyperbolischen Fall, wurde diese Schranke offenbar unabhängig von K. Schwarzschild wieder abgeleitet: $r > 4 \cdot 10^6$ Erdbahnradien (mit r “Radius” der Raumkrümmung r) (Schwarzschild 1900, 345). Die Auswertung der astronomischen Parallaxmessungen gaben damit für den Krümmungsradius Abschätzungen, die die Gaußsche Schranke um 10 Größenordnungen überschritten (Herabsetzung der Gaußschen “Constante” $C = |\kappa|$ also um 20 Größenordnungen!). Aus dieser Sicht erschienen natürlich die raumgeometrischen Ergebnisse der Gaußschen Messungen der 1820er Jahre völlig obsolet. Doch hatte man das ja nicht im vorhinein wissen können.

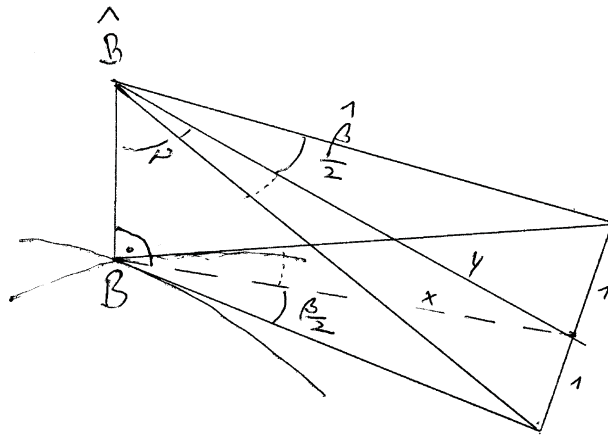
Immerhin war nun ein neues Kapitel der Geschichte der empirischen Bestimmung der metrischen Raumstruktur eröffnet. Auch dieses war noch gänzlich vor-relativistisch. Allerdings waren — nach einer Einschätzung

⁴⁰(Lobatschewsky 1829-30/1898, 22f.); vgl. (Daniels 1975).

⁴¹Listing berichtete auch nur mündlich in den 1870er Jahren gegenüber seinen Studenten über seine Erinnerung daran (Hoppe 1925). Diese Information wurde dankenswerterweise von Herrn Breitenberger wieder in Erinnerung gerufen, (Breitenberger 1984, 289).

⁴²Eine eigene Publikation zu diesem Thema ist in Vorbereitung.

Anhang: Ergänzung zur Begründung von Sachverhalt 4

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sin \nu} \tan \frac{\hat{\beta}}{2}.$$


26

Mit den Abkürzungen

$$c := \frac{1}{\sin \nu}, \quad z_0 := \hat{\beta}_0, \quad h := \Delta\beta, \quad z = z_0 + h = \hat{\beta}$$

wird

$$\beta(z) = 2 \arctan(c \tan \frac{z}{2}).$$

Reihenentwicklung um z_0 liefert für $\beta_0 := 2 \arctan(c \tan \frac{z_0}{2})$:

$$\beta(z) = \beta_0 + \frac{c(1 + \tan^2 \frac{z_0}{2})}{1 + c^2 \tan^2 \frac{z_0}{2}} h + o(h) \quad (5)$$

Beim Gaußschen “großen” Dreieck differiert ν um weniger als $0,5^\circ$ vom rechten Winkel; c unterscheidet sich erst in der Größenordnung 10^{-5} von 1. Der Koeffizient des linearen Term der Reihenentwicklung ist daher in sehr guter Näherung $c \approx 1$.

Literatur

- Breitenberger, Ernst. 1984. “Gauss’s geodesy and the axiom of parallels.” *Archive for History of Exact Sciences* 31:273–289.
- Daniels, N. 1975. “Lobachevsky, some anticipations of later views on the relation between geometry and physics.” *Isis* 66:75–85.
- Dombrowski, Peter. 1978. “Differentialgeometrie — 150 Jahre nach den “Disquisitiones generales circa superficies curvas” von Carl Friedrich Gauß.” *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft* 27:63–102.
- Gauss, Carl Friedrich. 1828. “Disquisitiones generales circa superficies curvas.” *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis* 6 (1828):99–146. In *Werke* IV, 217–258. Deutsch von A. Wangerin *Allgemeine Flächentheorie* Leipzig: Engelmann 1889.
- Gauss, Carl Friedrich. Olbers. *Werke Ergänzungsreihe IV Briefwechsel C.F. Gauss – H.W.M. Olbers*. Göttingen: Akademie der Wissenschaften: 1909. Nachdruck Hildesheim: Olms 1976.
- Gauss, Carl Friedrich. *Werke*. 12 Bände. Göttingen: Akademie der Wissenschaften: 1863–1927. Nachdruck Hildesheim: Olms 1973.
- Gerardy, Theo. 1955. Die Triangulation des Königreichs Hannover durch C.F. Gauß (1821–1844). In *C.F. Gauß und die Landesvermessung in Niedersachsen*, Hrsg. Niedersächsische Vermessungs und Katasterverwaltung. Hannover: pp. 83–114.

- Gericke, Helmuth. 1981. Gauß und die Grundlagen der Geometrie. In *(Schneider 1981, 113–142)*.
- Goe, George. 1974. “Comment on Miller’s ‘The myth of Gauß experiment on the Euclidean nature of physical space’.” *Isis* 65:83f.
- Hoppe, Edmund. 1925. “C.F. Gauss und der euklidische Raum.” *Die Naturwissenschaften* 13:743–744.
- Kienle, Hans. 1925. “Hugo von Seeliger.” *Die Naturwissenschaften* 13:613–619.
- Lobatschewskij, Nikolaj I. 1829-30/1898. “O natschalach geometrij.” *Kasanskij Vestnik* 25–28. Deutsche Übersetzung F. Engel: Ueber die Anfangsgründe der Geometrie. In *Zwei geometrische Abhandlungen*. Leipzig: Teubner, 1–66.
- Miller, Arthur. 1972. “The myth of Gauß’ experiment on the Euclidean nature of physical space.” *Isis* 63:345–348.
- Miller, Arthur. 1974. “Reply” [to (Goe 1974, van der Waerden 1974)]. *Isis* 65:86f.
- North, John. 1997. *Geschichte der Astronomie und Kosmologie*. Dtsche. Übersetzung von *The Fontana History of Astronomy and Cosmology*. Braunschweig: Vieweg.
- Reich, Karin. 1981. Geodäsie und Differentialgeometrie. In *(Schneider 1981, 85–112)*.
- Reichardt, Hans. 1976. *Gauß und die nicht-euklidische Geometrie*. Leipzig: Teubner.
- Richter, Peter. 2000. “Positive und negative Krümmungen im Gaußschen Dreieck.” *Mitteilungen Gauss-Gesellschaft Göttingen* 37:17–26.
- Sartorius von Waltershausen, Wolfgang. 1856. *Gauß zum Gedächtnis*. Leipzig: Hirzel. Nachdruck Wiesbaden: Sändig 1956.
- Schemmel, Matthias. 2002. “An astronomical road to general relativity.” *Preprint MPI Berlin*.
- Schneider, Ivo (Hrsg.). 1981. *Carl Friedrich Gauß (1777–1855): Sammelband von Beiträgen zum 200. Geburtstag von C.F. Gauß*. München: Minerva.
- Scholz, Erhard. 1992. Gauß und die Begründung der “höheren” Geodäsie. In *Amphora: Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*, Hrsg. D. Rowe; C.J. Scriba, S. Demidov, M. Folkerts. Basel: Birkhäuser pp. 631–647.

- Schwarzschild, Karl. 1900. "Ueber das zulässige Krümmungsmaass des Raumes." *Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft Leipzig* 35:337–347.
- Schwarzschild, Karl. 1916a. "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie." *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften*, 189–196.
- Schwarzschild, Karl. 1916b. "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie." *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften*, 424–434.
- Stäckel, Paul. 1918. C. F. Gauß als Geometer. In *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von C.F. Gauß*, Hrsg. M. Brendel; F. Klein.; L. Schlesinger. Number Heft 5 Leipzig: .
- van der Waerden, Baartel L. 1974. "Comment II" [on (Miller 1972)]. *Isis* 65:85.